Домашна работа 3 по Алгебра 1. 4 Въпрос.

Камен Димитров Младенов, Група 6

03 Януари 2022

4 Въпрос Спрямо някакъв базис на линейното пространство U над полето $\mathbb{R}$ на реалните числа, линейният оператор $\varphi : U \to U$ има матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -3 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Да се намерят базиси на сечението $\ker(\varphi) \cap \mathrm{im}(\varphi)$ и на сумата $\ker(\varphi) + \mathrm{im}(\varphi)$ на ядрото $\ker(\varphi)$ и образа $\mathrm{im}(\varphi)$ на φ.

Решение: Нека $e = (e_1, ..., e_n)$ да е базис на U. По определение, $A = (\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n))$, образувана по стълбове, и понеже A има 5 стълба, то $n = 5$ и $\dim(U) = 5$.

Ще намерим базис на $\ker(\varphi)$. Търсим $u \in U$, такова че $\varphi(u) = Au = \mathcal{O}$. Разглеждаме A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -3 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Събираме трети ред с втори. Умножаваме първи по -2 и събираме с трети. Събираме първи с четвърти и пети. Събираме новополучилият се трети ред с четвърти. Събираме новополучелият се четвърти ред с трети. Делим трети на -5 и пети на 4.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Умножаваме трети ред по -1 и събираме с пети.
Умножаваме трети ред по -3 и събираме с първи.
Умножаваме четвърти ред по -2 и събираме с първи.
Разменяме втори с трети и трети с четвърти. Изпускаме четвърти и пети.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Общото решение на хомогенната система е:
$x_1 = -x_4 - 2x_5, \quad x_2 = -x_4, \quad x_3 = x_4, \quad \forall x_4, x_5 \in U$
Нейна фундаментална система решения е: $(-2, 0, 0, 0, 1),\ (-1, -1, 1, 1, 0)$

Следователно $d(\varphi) = \dim(\ker(\varphi)) = 2$. От Теоремата за ранга и дефекта на линейно изображение в крайномерно пространство, $\mathrm{rk}(\varphi) := \dim(\mathrm{im}(\varphi)) = \dim(U) - \dim(\ker(\varphi)) = 3$.

По Теорема, $\mathrm{im}(\varphi) = l(\varphi(e_1), ..., \varphi(e_5))$. То тогава три непропорционални вектора от $\varphi(e_1), ..., \varphi(e_5)$ образуват базис на $\mathrm{im}(\varphi)$. Избираме:

$$\varphi(e_1) = (1, -2, 2, -1, -1)^t, \quad \varphi(e_2) = (3, -1, 1, 2, 1)^t \quad \text{и} \quad \varphi(e_3) = (2, -3, 3, 0, -2)^t$$

Ще намерим пространство от решения на $\mathrm{im}(\varphi)$. Решаваме матрица от коефициенти на базиса:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Умножаваме първи ред по -3 и събираме с втори.
Умножаваме първи ред по -2 и събираме с трети.
Разменяме втори и трети ред.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Умножаваме втори ред по -5 и събираме с трети.
Умножаваме втори ред по 2 и събираме с първи.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Умножаваме първи по 5, умножаваме трети по 3 и събираме с първи.
Умножаваме втори по 5, умножаваме трети по 2 и събираме с втори.

$$\sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Общото решение на хомогенната система решения е:

$$x_1 = -\frac{7x_5}{5}, \quad x_2 = \frac{5x_3 - 8x_5}{5}, \quad x_4 = \frac{4x_5}{5} \quad \forall x_3, x_5 \in U$$

Нейна фундаментална система решения е: $(-7, -8, 0, 4, 5),\ (0, 1, 1, 0, 0)$.

Базис на сечението $\ker(\varphi) \cap \operatorname{im}(\varphi)$ е матрица на хомогенните системи уравнения на $\ker(\varphi)$ и $\operatorname{im}(\varphi)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -7 & -8 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Умножаваме първи по 7 и събираме с четвърти. Умножаваме втори по 8 и събираме с четвърти. Умножаваме втори по -1 и събираме с пети. Делим новополучилият се четвърти на 19. Умножаваме трети по -1 и събираме с новополучилият се пети. Чрез четвърти зануляваме четвърта колона на другите редове.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Общото решение на на получената система е:

$x_1 = -x_5, \quad x_2 = x_5, \quad x_3 = -x_5, \quad x_4 = -x_5 \quad \forall x_5 \in U$

Следователно, $(-1, 1, -1, -1, 1)$ е базис на $\ker(\varphi) \cap \operatorname{im}(\varphi)$

Базис на сумата $\ker(\varphi) + \operatorname{im}(\varphi)$ е максимална линейно независима подсистема на базисите на $\ker(\varphi)$ и $\operatorname{im}(\varphi)$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Умножаваме втори ред по -2 и събираме с първи. Умножаваме втори ред по 5 и събираме с трети. Събираме новополучилият се трети с четвърти. Събираме новополучилият се четвърти с пети. Делим пети на 19 и зануляваме дясната колона на другите редове.

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Делим първи ред на 2 и трети на 5. Събираме трети с първи. Умножаваме трети по -1 и събираме с втори. Делим четвърти на пет и зануляваме четвъртата колона на другите редове. Умножаваме втори и трети ред по -1. Изпускаме първи ред.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Получената система е състои от четири ЛНЗ вектора, които са базис на $\ker(\varphi) + \operatorname{im}(\varphi)$: $(1, 0, 0, 0, 0),\ (0, 1, -1, 0, 0),\ (0, 0, 0, 1, 0),\ (0, 0, 0, 0, 1)$